Vektor-Geometrie

für die Sekundarstufe 1

Teil 2

Metrik mit Skalarprodukt

Für moderne Geometrie-Kurse am Gymnasium

und für Realschulen in Bayern!
(Prüfungsstoff!)

Dieser Text setzt Kenntnisse der Trigonometrie voraus!

Auch in der Oberstufe zur Ergänzung einzusetzen,
hier wird nur zweidimensional gerechnet!
Dafür wird vieles anschaulicher!

Datei Nr. 11812

Friedrich W. Buckel

Stand 13. Juli 2008

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text enthält vor allem viel Lesestoff. **Wer Vektorrechnung betreiben will, muss sie verstanden haben**. Daher habe ich versucht, mit vielen Erklärungen und Beispielen anschaulich zu machen, was hinter dem Begriff Vektor, hinter der Addition und Subtraktion von Vektoren steckt usw. Rechen- und Konstruktionsbeispiele gibt es daneben genügend.

Ein Problem könnte auftreten, nämlich dass der Stoff im Unterricht ganz anders dargeboten worden ist. Dann empfehle ich dennoch sich die Mühe zu machen, und diese Vektorgeschichte zu lesen. Ein anderer Gesichtspunkt hilft vielleicht, manche Verständnisprobleme zu beseitigen.

Es gibt für die Vektorrechnung auch unterschiedliche Schreibweisen. Beispielsweise wird in Bayern die Vektoraddition so geschrieben $\vec{u} \oplus \vec{v}$, was durchaus sinnvoll ist, denn eine Vektoraddition ist doch etwas anderes als eine Zahlenaddition, auch wenn diese dazu verwendet wird. In den meisten Bundesländern und Büchern ist man da etwas großzügiger und verwendet – nachdem geklärt ist, dass die Vektoraddition etwas Neues ist – dennoch die Schreibweise der Zahlenaddition: $\vec{u} + \vec{v}$. Ich werde dies auch so machen, der Mehrheit folgend. Dies sollte keinem Schüler Verständnisprobleme bereiten.
Ich werde später in Musteraufgaben für die bayerische Realschulabschlussprüfung ausnahmsweise doch die Notation $\vec{u} \oplus \vec{v}$ verwenden, aber nur dort, weil diese Aufgaben und Lösungen in erster Linie für diese Zielgruppe geschrieben werden.

Ein Problem ist es, wie viel der dreidimensionalen Vektorgeometrie (siehe Band 6 der **INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK)** auf die Mittelstufe zu übertragen ist. Ich biete hier eine sinnvolle Auswahl an. Sollte eine Klasse irgendwo ein wenig mehr behandeln, sollte man eben in Band 6 nachlesen. Hier also das Wichtigste für zweidimensionale Vektorgeometrie.

Am Ende des Textes, also nach den Lösungen findet man das Wichtigste kurz zusammengefasst als Lernblätter!

Inhalt

§ 7 Metrik – Anwendungen in der Geometrie

7.1 Seiten- und Winkelberechnung in Dreiecken

Beispiel 1

Gegeben ist das Dreieck ABC durch
$A(-3|2);\ B(3|-4);\ C(1|6)$

a) Vektorielle Berechnung der Seitenlängen

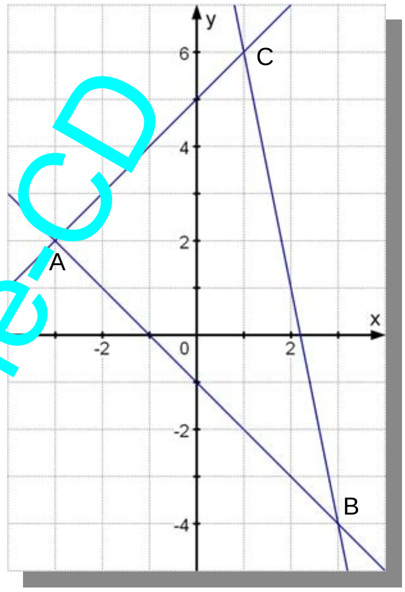
Dazu berechnen wir zuerst drei Vektoren.

Wissen:
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ kann durch die Ortsvektoren der Punkte A und B so berechnet werden:
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, wobei die Ortsvektoren die Pfeile sind, die vom Ursprung zum Punkt zeigen. Sie haben daher dieselben Koordinaten wie die Endpunkte:

$A(-3|2) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$B(3|-4) \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Also gilt: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$



Analog folgt: $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Dies kann man in der Zeichnung überprüfen. Beispielsweise zeigt der Pfeil $\overrightarrow{BC}$ von B aus 2 nach links und 10 nach oben. So hat man eine Kontrolle, ob man richtig gerechnet hat.

Die Seitenlängen sind die Längen der Pfeile, also die Beträge der Vektoren:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2} \text{ (LE)}$$

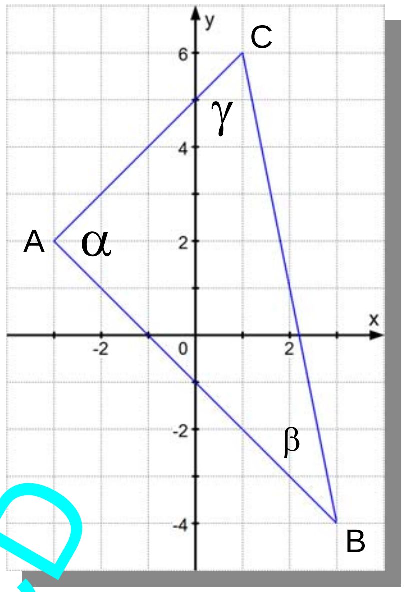
$$\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2} \text{ (LE)}$$

$$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \text{ (LE)}$$

Ich habe teilweise die Wurzel gezogen, das ist nicht unbedingt nötig. Man kann auch die Näherungswerte für die Streckenlängen angeben:

$$\overline{AB} = \sqrt{72} \approx 8{,}46 \text{ (LE)},\quad \overline{AC} = \sqrt{32} \approx 5{,}66 \text{ (LE)} \quad \text{und} \quad \overline{BC} = \sqrt{104} \approx 10{,}20 \text{ (LE)}.$$

b) Vektorielle Berechnung der Innenwinkel



Erklärung der Methode

Der Winkel α wird von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ eingeschlossen.

Wir verwenden die erste Formel für das Skalarprodukt dieser Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha$$

und stellen sie nach $\cos\alpha$ um:

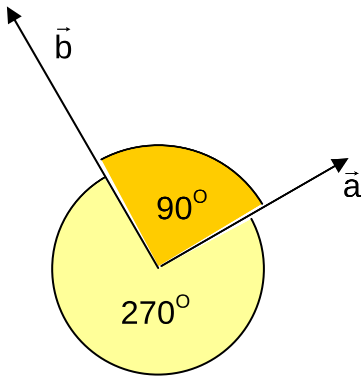
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}}$$

Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ folgt $\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 24 + (-24) = 0$.

Also erhalten wir hier $\cos\alpha = \dfrac{0}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{32}} = 0$ Dies führt zu $\alpha = 90^\circ$!

Es liegt also ein rechtwinkliges Dreieck vor.

Merke:	Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren 0 wird, sind die Vektoren **orthogonal**, d.h. sie bilden den Winkel 90° bzw. 270°. In einem Dreieck gibt es jedoch keine Innenwinkel, die größer als 180° sind, daher folgt aus $\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC} = 0$ sofort $\alpha = 90^\circ$. Die Länge der Vektoren (im Nenner des Bruches) ist dazu völlig unerheblich.



Berechnung von β: $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BA} \odot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}$

Wir kennen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, also ist $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Beide haben denselben Betrag $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{72}$

Ferner kennen wir bereits $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{104}$. Also folgt:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{104}} = \frac{12 + 60}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{104}} = \frac{72}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{104}}.$$

Der Taschenrechner liefert $\beta \approx 33{,}69^\circ$.

Es erhebt sich die Frage, was passiert, wenn man mit $\overrightarrow{AB}$ statt mit $\overrightarrow{BA}$ rechnet. Ja, dann haben wir im Zähler und folglich für den Kosinus das umgekehrte Vorzeichen: Er wird negativ und somit erhalten wir einen Winkel zwischen 90° und 180°, was nicht richtig ist! Also sollte man Vektoren immer vom Scheitel des Winkels weg zeichnen!

Berechnung von γ **:** $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CA} \odot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$

Wir kennen $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, also ist $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Beide haben denselben Betrag $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{32}$

Ferner kennen wir bereits $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, also ist $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{104}$.

Also folgt: $\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{104}} = \dfrac{-8+40}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{104}} = \dfrac{32}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{104}}$ mit $\gamma \approx 56{,}31^{\circ}$

ACHTUNG:

Wir haben nun des Guten zuviel getan, denn wenn man zwei Winkel im Dreieck kennt, kann man den dritten aus der Winkelsumme 180° berechnen.

Kürzer ist demnach: $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta \approx \underbrace{180^{\circ} - 90^{\circ}}_{90^{\circ}} - 33{,}69^{\circ} = 56{,}31^{\circ}$

Zusammenfassung

Man kann die Innenwinkel eines Dreiecks über die Skalarproduktformel der beiden Vektoren berechnen, die den Winkel einschließen. Dabei ist es wichtig, dass die Pfeile vom Scheitel des Winkels weg zeigen.

Wir verwenden also

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \odot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \odot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \odot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$$

Kennt man zwei Winkel, berechnet man den dritten über die Winkelsumme, die im Dreieck 180° beträgt.